Vektorrechnung

Projektionssatz

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_{\vec{a}} = \vec{a}_{\vec{b}} \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a}_{\vec{b}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp \vec{a}}$

Abstand Punkt–Ebene

Über HESSEsche Normalform

geg: P_0, $\varepsilon : \vec{n} \cdot \vec{x} + D = 0$

Das Lot von P_0 ist parallel zu $\vec{n}$ $\rightarrow$ Einsetzen der Punktkoordinaten in HNF der Ebene:

$$h = |p_0 - p| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{x_0} + D}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{Ax_P + By_P + Cz_P + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Über Kreuzprodukt

geg: P_0, $\varepsilon : \vec{x} = \vec{x_0} + r\vec{a} + s\vec{b}$

$h = |P\vec{L}_P| \quad P\vec{L}_P := \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = P\vec{P}_0 + P_0\vec{L}_P \quad | \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = P\vec{P}_0 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

$$h = \left| \frac{(\vec{x_0} - \vec{x_P}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \right|$$

Schnittpunkt Gerade–Gerade im $\mathbb{R}^2$

geg: $g_1 : \vec{x} = \vec{x_1} + t\vec{a_1}$, $g_2 : \vec{x} = \vec{x_2} + u\vec{a_2}$

$$\vec{x_S} = \vec{x_2} + \frac{|(\vec{x_1}\ \vec{a_1})| - |(\vec{x_2}\ \vec{a_2})|}{|(\vec{a_2}\ \vec{a_1})|}$$

Schnittpunkt Gerade–Ebene

geg: $g : \vec{x} = \vec{x_1} + t\vec{a}$; $\varepsilon : \vec{n} \cdot \vec{x} + D = 0$

$$0 = \vec{n} \cdot (\vec{x_1} + t_s\vec{a}) + D = \vec{n} \cdot \vec{x_1} + t_s(\vec{n} \cdot \vec{a}) + D \Rightarrow t_s = \frac{-D - \vec{n} \cdot \vec{x_1}}{\vec{n} \cdot \vec{a}}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden

geg: $g : \vec{x} = \vec{x_1} + s\vec{a}$; $h : \vec{x} = \vec{x_2} + t\vec{b}$ $\quad \vec{a} \neq \vec{b}$, $g \cap h = \phi$

Der Abstand ist gleich dem Abstand zweier Punkte $P \epsilon g$ und $Q \epsilon h$ mit $\vec{PQ} \perp \vec{a}$ und $\vec{PQ} \perp \vec{b}$

$\vec{PQ} := \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{x_2} - \vec{x_1}) + t_Q\vec{b} - s_P\vec{a} \quad | \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \Rightarrow \quad [\lambda(\vec{a} \times \vec{b})] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{x_2} - \vec{x1}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(\vec{x_2} - \vec{x_1}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|^2}$

$$d = \left| \frac{(\vec{x_2} - \vec{x_1}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \right|$$

Tangentialebene τ an einer Kugel

geg: Mittelpunkt M und Radius r einer Kugel Ku, Punkt P_0 ε Ku

$$\tau : (\vec{x_0} - \vec{x_M}) \cdot (\vec{x} - \vec{x_M}) = r^2$$

oder

$$\tau : (\vec{x_0} - \vec{x_M}) \cdot (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$$