Matrizenrechnung

Definition

Eine Matrix vom Typ $(m;n)$ ist ein rechteckiges, nach m Zeilen und n Spalten geordnetes Schema von $m*n$ Elementen.

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

a^i : *i*-ter Zeilenvektor der Matrix A $(1 \leq i \leq m)$ a_k : *k*-ter Spaltenvektor der Matrix A $(1 \leq k \leq n)$

Rang einer Matrix $A_{m,n}$: Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (oder Spalten)
$\det A \neq 0 \rightarrow$ Rang = m; alle Zeilen linear unabhängig
$\det A = 0 \rightarrow$ Rang < m; mehrere Zeilen sind linear abhängig voneinander

Sonderformen

- **Quadratische Matrix:** $m = n \quad \rightarrow$ Matrix der *Ordnung* n
- **Nullmatrix N:** alle Elemente 0
- **Einheitsmatrix E:** alle Elemente der Hauptdiagonale 1, alle anderen 0
- **Diagonalmatrix:** Alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale gleich 0
- **Symmetrische Matrix:** $a_{i,k} = a_{k,i} \rightarrow$ Spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale
- **Antimetrische/schiefsymmetrische Matrix:** $a_{i,k} = -a_{k,i} \rightarrow \ a_{i,i} = 0$
- **untere/obere Dreiecksmatrix:** alle Elemente unter-/oberhalb der Hauptdiagonale 0

Gleichheit

geg: $A_{m,n}, B_{m,n}$ Wenn $a_{i,k} = b_{i,k}$, so ist $A = B$.

Transformierte Matrix

$A^T \rightarrow$ „Spiegeln” der Matrix A an Hauptdiagonale $\rightarrow \ a_{i,k} \leftrightarrow a_{k,i}$

Addition und Subtraktion

$A_{m,n} \pm B_{m,n} = C_{m,n}$ mit $c_{i,k} = a_{i,k} \pm b_{i,k}$ Es gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz.

Skalierung (Multiplikation mit Faktor)

$r \cdot A_{m,n} = B_{m,n}$ mit $b_{i,k} = r\ a_{i,k}$ Es gelten das Kommutativ-, Assoziativ- und beide Distributivgesetze.

Multiplikation zweier Matrizen

$A_{m,n} \cdot B_{n,o} = C_{m,o}$ mit $c_{i,k} = a^i \cdot b_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} \cdot b_{\ell,k}$
Es gilt das Assoziativ-, jedoch **nicht**(!) das Kommutativgesetz.

Beispiel:

$A \cdot B$	$\begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix}$	
$1 \quad -2$	$1 \cdot 2 + (-2 \cdot -1) = \mathbf{4}$	$1 \cdot 0 + (-2 \cdot 3) = \mathbf{-6}$
$3 \quad 4$	$3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = \mathbf{2}$	$3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = \mathbf{12}$

$\rightarrow$ FALK-Schema

Spezialfälle: $A \cdot N = N$ $\quad A \cdot E = E$ $\quad$ wenn $A \cdot B = N \rightarrow$ A und B sind *Nullteiler*.

Matrizen können zur Multiplikation an geeigneten Zeilen und Spalten zerlegt und die Teilmatrizen wie gewohnt multipliziert werden. Die Produktteilmatrizen werden wiederum nach der Produktvorschrift zu einer Ergebnismatrix verbunden.

Kehrmatrix/inverse Matrix

$A_n^{-1} \cdot A_n =_{Def} \; E_n \rightarrow$ nur für quadratische Matrizen

Berechnung über Determinanten

$$a^{-1}{}_{i,k} = \frac{(-1)^{i \cdot k - 1}}{\det A} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,i-1} & a_{k-1,i+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,i-1} & a_{k+1,i+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ $a^{-1}{}_{i,k}$: Zeile k und Spalte i streichen (Koordinatentausch beachten!); Restdeterminante berechnen; negieren, wenn $i \cdot k$ gerade ist; durch $\det A$ dividieren

Berechnung über (verketteten) Gauß-Algorithmus

- Koeffizienten von A $\hat{=}$ Gleichungskoeffizienten
- Statt einer Ergebnisspalte wird die Einheitsmatrix eingesetzt ($\rightarrow$ n Ergebnisspalten)
- Lösen des Schemas (auch für *alle* n Ergebnisspalten)
- Lösungen, wenn die i-ten Ergebnisspalte verwendet wird = i-te Spalte der Kehrmatrix

Division zweier Matrizen

$$C_{m,n} = A_m^{-1} \cdot B_{m,n}$$

Die Berechnung des Quotienten erfolgt wie die Berechnung der Kehrmatrix, nur daß als „Lösungsmatrix” nicht E, sondern B eingesetzt wird.

Anwendungsbeispiele

Formelle Lösung eines Gleichungssystems

geg: $Y = A \cdot X \quad | \quad A^{-1} \cdot$ $\qquad A^{-1} \cdot Y = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot Y$

Koordinaten-Transformationsmatrizen

$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (für Abb. in der Ebene) $\quad P \mapsto P' : \vec{x'} = T\vec{x}$

z. B. Rotation um Winkel α, Skalierung mit Faktor k: $T = \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\sin\alpha \\ -k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}$